SOLUZIONE DELLE STRUTTURE A TELAIO SPAZIALI TENENDO CONTO DEGLI EFFETTI DEL SECONDO ORDINE CON IL METODO DEI CARICHI FITTIZI APPLICATI

Si consideri un'asta di lunghezza L riferita ad una terna di assi cartesiani x,y,z, di cui gli assi x,y ortogonali all'asse dell'asta e l'asse z coincidente con l'asse dell'asta, quando questa è nella posizione indeformata. Il primo estremo dell'asta sia per semplicità posizionato nell'origine degli assi.

Si indichi con $\mathbf{q}_F(z)$ e $\mathbf{q}_M(z)$ i vettori forza e momento dei carichi distribuiti applicati all'asta:

$\mathbf{q}_F(z) = |\ \mathbf{i}\ q_x(z) \quad \mathbf{j}\ q_y(z) \quad \mathbf{k}\ q_z(z)\ |$
$\mathbf{q}_M(z) = |\ \mathbf{i}\ q_{xx}(z) \quad \mathbf{j}\ q_{yy}(z) \quad \mathbf{k}\ q_{zz}(z)\ |$

e si indichi con $\mathbf{V}(z)$ e $\mathbf{W}(z)$ i vettori forza e momento delle sollecitazioni interne nell'asta alla generica sezione di coordinata z

$\mathbf{V}(z) = |\ \mathbf{i}\ V_x(z) \quad \mathbf{j}\ V_y(z) \quad \mathbf{k}\ V_z(z)\ |$
$\mathbf{W}(z) = |\ \mathbf{i}\ V_{xx}(z) \quad \mathbf{j}\ V_{yy}(z) \quad \mathbf{k}\ V_{zz}(z)\ |$

e si indichi con $\mathbf{O}(z)$ il vettore di posizione del generico punto dell'asse dell'asta alla coordinata z

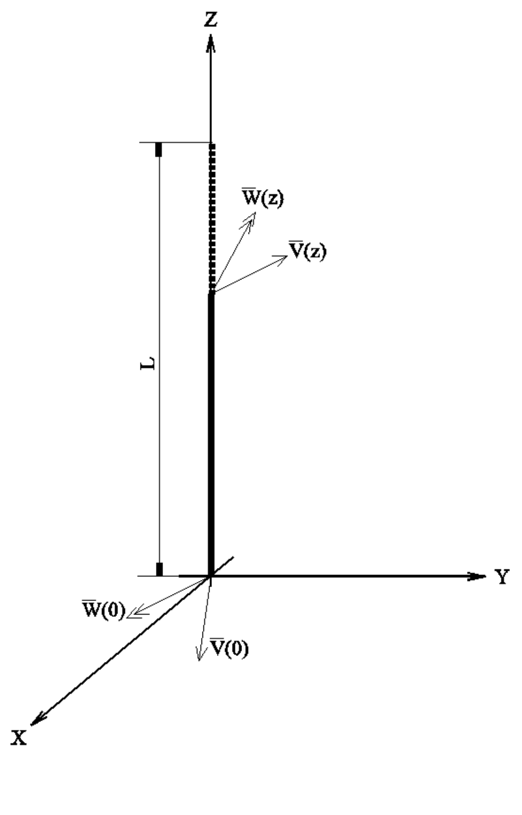
$\mathbf{O}(z) = |\ \mathbf{i}\ O_x(z) \quad \mathbf{j}\ O_y(z) \quad \mathbf{k}\ O_z(z)\ |$

e si indichi con $\boldsymbol{\eta}(z)$ il vettore spostamento del generico punto dell'asse dell'asta alla coordinata z

$\boldsymbol{\eta}(z) = |\ \mathbf{i}\ \eta_x(z) \quad \mathbf{j}\ \eta_y(z) \quad \mathbf{k}\ \eta_z(z)\ |$

dove i vettori sono riportati in grassetto e si sono indicati con **i**, **j** e **k** i versori degli assi x,y e z rispettivamente. Il prodotto vettoriale è indicato con il simbolo ^.

Le equazioni di equilibrio della porzione di asta tra 0 e z, alla traslazione ed alla rotazione, scritte rispetto alla posizione indeformata, risultano:



(1a) $\mathbf{V}(z) - \mathbf{V}(0) + \int_{0,z} \mathbf{q}_F(z)\, dz = 0$

(2a) $\mathbf{W}(z) - \mathbf{W}(0) + (\mathbf{O}(z)-\mathbf{O}(0)) \wedge \mathbf{V}(z) + \int_{0,z} (\mathbf{O}(z)-\mathbf{O}(0)) \wedge \mathbf{q}_F(z)\, dz + \int_{0,z} \mathbf{q}_M(z)\, dz = 0$

dove il punto **O**(z) nella posizione indeformata vale

(3a) $\mathbf{O}(z) = \mathbf{k}\ z$

Derivando le (1a) e (2a) si ha:

(4a) $d\mathbf{V}(z)/dz + \mathbf{q}_F(z) = 0$

(5a) $d\mathbf{W}(z)/dz + d(\mathbf{O}(z)-\mathbf{O}(0))/dz \wedge \mathbf{V}(z) + (\mathbf{O}(z)-\mathbf{O}(0)) \wedge d\mathbf{V}(z)/dz + (\mathbf{O}(z)-\mathbf{O}(0)) \wedge \mathbf{q}_F(z) + \mathbf{q}_M(z) = 0$

e tenendo conto della (4a) la (5a) diviene

$$d\mathbf{W}(z)/dz + d(\mathbf{O}(z)-\mathbf{O}(0))/dz \wedge \mathbf{V}(z) - (\mathbf{O}(z)-\mathbf{O}(0)) \wedge \mathbf{q}_F(z) + (\mathbf{O}(z)-\mathbf{O}(0)) \wedge \mathbf{q}_F(z) + \mathbf{q}_M(z) = 0$$

semplificando e tenendo conto della (3a) si ha

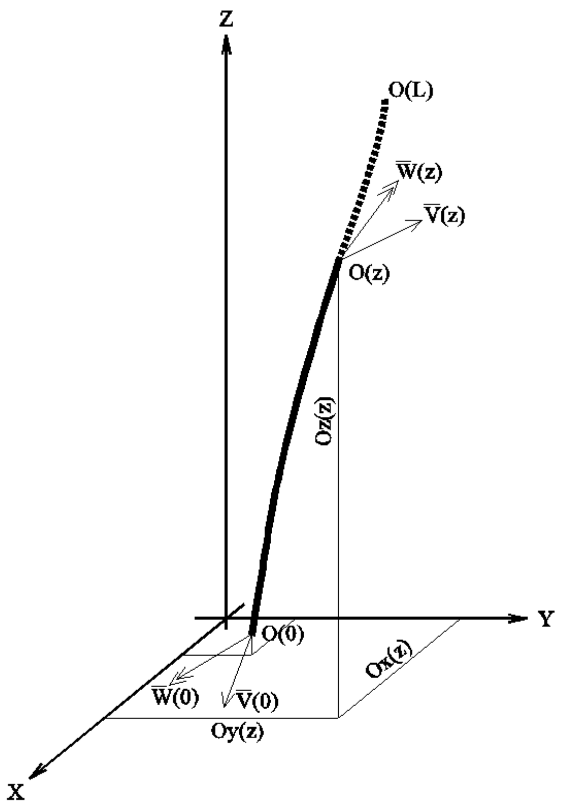
(6a) $d\mathbf{W}(z)/dz + \mathbf{k} \wedge \mathbf{V}(z) + \mathbf{q}_M(z) = 0$

derivando e ricordando ancora la (4a) si ha

(7a) $d^2\mathbf{W}(z)/dz^2 - \mathbf{k} \wedge \mathbf{q}_F(z) + d\mathbf{q}_M(z)/dz = 0$

L'equazione (4a) è l'equazione indefinita di equilibrio alla traslazione e la (7a) è l'equazione indefinita di equilibrio alla rotazione.

Le equazioni di equilibrio della porzione di asta tra 0 e z, alla traslazione ed alla rotazione, scritte nella posizione deformata, risultano:



(1b) $\mathbf{V}(z) - \mathbf{V}(0) + \int_{0,z} \mathbf{q}_F(z)\, dz = 0$

(2b) $\mathbf{W}(z) - \mathbf{W}(0) + (\mathbf{O}(z)-\mathbf{O}(0))\wedge\mathbf{V}(z) + \int_{0,z} (\mathbf{O}(z)-\mathbf{O}(0))\wedge\mathbf{q}_F(z)\, dz + \int_{0,z} \mathbf{q}_M(z)\, dz = 0$

dove il punto $\mathbf{O}(z)$ nella posizione deformata vale, in ambito di piccoli spostamenti ed a meno di termini di ordine superiore:

(3b) $\mathbf{O}(z) = \left|\ \mathbf{i}\ \eta_x(z)\quad \mathbf{j}\ \eta_y(z)\quad \mathbf{k}\ \ (z+\eta_z(z))\ \right|$

cioè lo spostamento η_x in direzione x, η_y in direzione y e lo spostamento η_z in direzione z sommato a z. E' anche:

(4b) $\mathbf{O}(z)-\mathbf{O}(0) = \left|\ \mathbf{i}\ (\eta_x(z)-\eta_x(0))\quad \mathbf{j}\ (\eta_y(z)-\eta_y(0))\quad \mathbf{k}\ \ (z+\eta_z(z)-\eta_z(0))\ \right|$

Derivando le (1b) e (2b) si ha

(5b) $d\mathbf{V}(z)/dz + \mathbf{q}_F(z) = 0$

(6b) $d\mathbf{W}(z)/dz + d(\mathbf{O}(z)-\mathbf{O}(0))/dz\wedge\mathbf{V}(z) + (\mathbf{O}(z)-\mathbf{O}(0))\wedge d\mathbf{V}(z)/dz + (\mathbf{O}(z)-\mathbf{O}(0))\wedge\mathbf{q}_F(z) + \mathbf{q}_M(z) = 0$

e tenendo conto della (5b) la (6b) diviene

$$d\mathbf{W}(z)/dz + d(\mathbf{O}(z)-\mathbf{O}(0))/dz\wedge\mathbf{V}(z) - (\mathbf{O}(z)-\mathbf{O}(0))\wedge\mathbf{q}_F(z) + (\mathbf{O}(z)-\mathbf{O}(0))\wedge\mathbf{q}_F(z) + \mathbf{q}_M(z) = 0$$

semplificando e tenendo conto della (4b)

$$d\mathbf{W}(z)/dz + d(\left|\ \mathbf{i}\ (\eta_x(z)-\eta_x(0))\quad \mathbf{j}\ (\eta_y(z)-\eta_y(0))\quad \mathbf{k}\ \ (z+\eta_z(z)-\eta_z(0))\ \right|)/dz\wedge\mathbf{V}(z) + \mathbf{q}_M(z) = 0$$

ed eseguendo la derivata

$$d\mathbf{W}(z)/dz + \left|\ \mathbf{i}\ \eta'_x(z)\quad \mathbf{j}\ \eta'_y(z)\quad \mathbf{k}\ (1+\eta'_z(z))\right|\wedge\mathbf{V}(z) + \mathbf{q}_M(z) = 0$$

e anche

(7b) $d\mathbf{W}(z)/dz + \mathbf{k}\wedge\mathbf{V}(z) + \left|\ \mathbf{i}\ \eta'_x(z)\quad \mathbf{j}\ \eta'_y(z)\quad \mathbf{k}\ \eta'_z(z)\right|\wedge\mathbf{V}(z) + \mathbf{q}_M(z) =$

$$= d\mathbf{W}(z)/dz + \mathbf{k}\wedge\mathbf{V}(z) + \boldsymbol{\eta}'(z)\wedge\mathbf{V}(z) + \mathbf{q}_M(z) = 0$$

derivando ulteriormente e ricordando la (5b)

(8b) $d^2\mathbf{W}(z)/dz^2 - \mathbf{k}\wedge\mathbf{q}_F(z) + d(\boldsymbol{\eta}'(z)\wedge\mathbf{V}(z))/dz + d\mathbf{q}_M(z)/dz = 0$

Dal confronto delle equazioni indefinite di equilibrio ottenute per l'asta nella posizione indeformata e per l'asta nella posizione deformata, si deduce che lo stato di sollecitazione e di deformazione dell'asta nella sua posizione deformata, a meno di effetti più piccoli e trascurabili, si può ottenere considerando le equazioni di equilibrio dell'asta nella posizione indeformata aggiungendo i carichi "fittizi" distribuiti sull'asta $\mathbf{q}^{II}(z)$ e concentrati agli estremi dell'asta $\mathbf{V}^{II}(0)$ e $\mathbf{V}^{II}(L)$:
dal confronto tra l'equazione (7a) e l'equazione (8b) si ha:

(9b) $\mathbf{q}^{II}(z) = d(\boldsymbol{\eta}'(z)\wedge\mathbf{V}(z))/dz$

e dal confronto tra l'equazione (6a) e l'equazione (7b) si ha:

(10b) $\mathbf{V}^{II}(z) = \boldsymbol{\eta}'(z)\wedge\mathbf{V}(z)$

che deve valere anche in z=0 e z=L.

Ed in termini scalari:

sviluppando il prodotto vettoriale della (9b) e (10b), si ha

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \eta'_x(z) & \eta'_y(z) & \eta'_z(z) \\ V_x(z) & V_y(z) & V_z(z) \end{vmatrix} =$$

$$= (\mathbf{i}\,(V_z(z)\,\eta'_y(z) - V_y(z)\,\eta'_z(z)) + \mathbf{j}\,(V_x(z)\,\eta'_z(z) - V_z(z)\,\eta'_x(z)) + \mathbf{k}(V_y(z)\,\eta'_x(z) - V_x(z)\,\eta'_y(z))$$

inoltre essendo

$$\mathbf{k}\wedge\mathbf{q_F}(z) = \mathbf{i}\,(-q_y(z)) + \mathbf{j}\,q_x(z) + \mathbf{k}\,0$$

dalla (8b) si hanno le equazioni di equilibrio flessionali in forma scalare:

$$d^2V_{xx}(z)/dz^2 + q_y(z) + d/(\,V_z(z)\,\eta'_y(z) - V_y(z)\,\eta'_z(z))/dz + dq_{xx}(z)/dz = 0$$
$$d^2V_{yy}(z)/dz^2 - q_x(z) + d/(\,V_x(z)\,\eta'_z(z) - V_z(z)\,\eta'_x(z))/dz + dq_{yy}(z)/dz = 0$$

e dalla (5b) ricordando che risulta

$$\mathbf{k}\wedge\mathbf{V}(z) = \mathbf{i}\,(-V_y(z)) + \mathbf{j}\,V_x(z) + \mathbf{k}\,0$$

si ha l'equazione indefinita di equilibrio alla torsione in forma scalare:

$$dV_{zz}(z)/dz + (V_y(z)\,\eta'_x(z) - V_x(z)\,\eta'_y(z)) + q_{zz}(z) = 0$$

e quindi i carichi fittizi distribuiti in termini scalari:

$$q^{II}_x(z) = d/(V_z(z)\,\eta'_y(z) - V_y(z)\,\eta'_z(z))/dz$$
$$q^{II}_y(z) = d/(V_z(z)\,\eta'_x(z) - V_x(z)\,\eta'_z(z))/dz$$
$$q^{II}_z(z) = 0$$
$$q^{II}_{xx}(z) = 0$$
$$q^{II}_{yy}(z) = 0$$
$$q^{II}_{zz}(z) = (V_y(z)\,\eta'_x(z) - V_x(z)\,\eta'_y(z))$$

e quelli concentrati agli estremi, da calcolarsi in z=0 e z=L:

$$V^{II}_x(z) = -(V_z(z)\,\eta'_x(z) - V_x(z)\,\eta'_z(z))$$
$$V^{II}_y(z) = -(V_z(z)\,\eta'_y(z) - V_y(z)\,\eta'_z(z))$$
$$V^{II}_z(z) = 0$$
$$V^{II}_{xx}(z) = 0$$
$$V^{II}_{yy}(z) = 0$$
$$V^{II}_{zz}(z) = 0$$

Le forze riferite al sistema di assi relativo alla sezione nella sua posizione deformata:

$$\mathbf{F}(z) = |\,\mathbf{i}r\,F_x(z) \quad \mathbf{j}r\,F_y(z) \quad \mathbf{k}r\,F_z(z)\,|$$
$$\mathbf{M}(z) = |\,\mathbf{i}r\,F_{xx}(z) \quad \mathbf{j}r\,F_{yy}(z) \quad \mathbf{k}r\,F_{zz}(z)\,|$$

si hanno, a meno di termini di ordine superiore, proiettando le forze V e i momenti W nel sistema di riferimento relativo e togliendo i carichi fittizi già compresi, quindi in forma matriciale:

$$F(z) = R(z) \bullet V(z) - V^{II}(z)$$
$$M(z) = R(z) \bullet W(z)$$

dove R(z) è la matrice di trasformazione alla rotazione per passare dal sistema x,y,z al sistema xr,yr,zr; trascurando per semplicità la dipendenza da z si hanno le espressioni scalari:

$$F_x = V_x + V_y \theta_z \;\; - V_z \eta'_x + (V_z \eta'_x - V_x \eta'_z) = \; V_x + V_y \theta_z - V_x \eta'_z$$
$$F_y = V_y - V_x \theta_z \;\; - V_z \eta'_y + (V_z \eta'_y - V_y \eta'_z) = \; V_y - V_x \theta_z - V_y \eta'_z$$
$$F_z = V_z + V_x \eta'_x + V_y \eta'_y$$

$$F_{xx} = V_{xx} + V_{yy} \theta_z \; - V_{zz} \eta_x'$$
$$F_{yy} = V_{yy} - V_{xx} \theta_z \;\; - V_{zz} \eta_y'$$
$$F_{zz} = V_{zz} + V_{xx} \eta_x' + V_{yy} \eta_y'$$

dove l'ultimo termine delle prime due equazioni sono praticamente trascurabili.

La soluzione delle strutture a telaio composte da aste, considerando gli effetti del secondo ordine, si ottiene dunque scrivendo le equazioni di equilibrio della struttura nella sua posizione indeformata applicando ad ogni asta i carichi fittizi distribuiti $\mathbf{q}^{II}(z)$ e i carichi concentrati agli estremi $\mathbf{V}^{II}(0)$ e $\mathbf{V}^{II}(L)$. Non essendo a priori questi carichi noti il problema si risolve per iterazione applicando al generico passo i carichi fittizi calcolati con la soluzione ottenuta al passo precedente.